# Izoton vetítések és alkalmazásaik

Nemeth, AB; Nemeth, Sandor



*Citation for published version (Harvard):*
Nemeth, AB & Nemeth, S 2022, 'Izoton vetítések és alkalmazásaik', *Alkalmazott Matematikai Lapok*, vol. 39, no. 2, pp. 1-11.

# IZOTON VETÍTÉSEK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Németh Sándor Németh Sándor Zoltán

**Kivonat**

Izoton a rendezett vektortérnek az a saját leképezése, amely annak rendezését megtartja. Izoton pl. a vektorhálóban a pozitív rész leképezés, vagy a Hilbert tér sajátos kúpjaira való vetítés. Ezeknek és általánosításaiknak gyakorlati alkalmazásain kívül, fontosak a kapcsolódó elméleti kutatások, amelyek további alkalmazások alapját képezhetik. A jelen dolgozat e két aspektus eredményeinek fontos részét hivatott összefoglalni abban az esetben amikor a leképezés a metrikus vetítés.

## 1. Bevezetés

A nemlineáris komplementaritás feladata fixpont keresésére vezethető vissza, melynek lényeges mozzanata a feladat kúpjára való vetítés. Ha utóbbi a kúp értelmezte rendezés szerint izoton, a megoldás iteratív eljárás eredménye lehet. A kúpra vetítés izotonitásának kérdését a [8] dolgozat oldotta meg, amely kapcsolódó gyakorlati és elméleti kutatások előzményéül szolgált. Ezek lényeges mozzanata, hogy, amint azt a [11] dolgozat kimondja, a vetítés izotonitás esetén rendkívül hatékony. A hatékonyság fontossága onnan adódik, hogy az alkalmazások többségében a vetítés iteratív eljárások része. Bár a komplementaritás talaján fogant, a kutatás eredményei hasznosnak bizonyultak a statisztikában és a metrikus geometriában is.

Rövid összefoglalónkban a kérdéskör néhány jelentősebb elméleti és gyakorlati eredményéről számolunk be.

## 2. Értelmezések

Legyen $\mathbb{H}$ valós Hilbert tér, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a téren értelmezett skaláris szorzat , $\| \cdot \|$ a skaláris szorzat értelmezte norma.

A $\mathbb{H}$ térben értelmezett $\leq$ bináris reláció *rendezés*, ha reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus. Tételezzük föl, hogy a reláció a tér vektorstruktúrájához a következő axiómákkal kapcsolódik: (1) ha $x \leq y$, akkor $tx \leq ty$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$; (2) ha $x \leq y$, akkor $x + z \leq y + z$, $\forall\, z \in \mathbb{H}$. A $(\mathbb{H}, \leq)$ kettőst *rendezett Hilbert térnek* nevezzük.

A $K = \{x \in \mathbb{H} : 0 \leq x\}$ halmaz a tér $\leq$ bináris relációjára vonatkozó *pozitív kúpja.* A $K$ pozitív kúp a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(i) $K + K \subseteq K$, (ii) $tK \subseteq K$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$ és (iii) $K \cap (-K) = \{0\}$. A pozitív kúp jellemzi a rendezett Hilbert teret abban az értelemben, hogy $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K$. Ez indokolja a $\leq$ és a $\leq_K$ jelölések párhuzamos használatát.

A $K$ kúp *származtató*, ha $K - K = \mathbb{H}$.

Az (i), (ii) és (iii) tulajdonságokkal rendelkező tetszőleges nemüres $K \subseteq \mathbb{H}$ halmazt *kúpnak* nevezzük. A $K$ kúp által származtatott $\leq_K$ bináris relációt az $x \leq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$ ekvivalencia értelmezi. Minden $K$ kúp a $\mathbb{H}$ Hilbert tér egy pozitív kúpja az általa származtatott bináris relációra vonatkozóan.

A $(\mathbb{H}, \leq)$ rendezett Hilbert tér *vektorháló*, ha tetszőleges két $x$ és $y$ elemére létezik a $\sup\{x,y\} = x \vee y \in \mathbb{H}$ elem és az $\inf\{x,y\} = x \wedge y \in \mathbb{H}$ elem. A $\vee$ és $\wedge$ operćiókat *hálóoperációknak* nevezzük A vektorháló pozitív kúpja ú. n. *hálókúp*.

Egy $K$ kúp *duálisa* a

$$K^* := \{y \in \mathbb{H} : \langle x, y\rangle \geq 0, \forall x \in K\}$$

halmaz. A $K^*$ halmaz egy zárt kúp. Ha a $K$ kúp zárt is, akkor $(K^*)^* = K$. Tehát, az $L = K^*$ jelöléssel, $K = (K^*)^* = L^*$. Ezért a $K$ és $L$ kúpokat *kölcsönösen duális* kúpoknak nevezzük.

A $\rho : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ leképezés *$K$-izoton* ha $x \leq_K y \Rightarrow \rho(x) \leq_K \rho(y)$ és *$K$-szubadditív* ha $\rho(x+y) \leq_K \rho(x) + \rho(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{H}$.

# 3. Hálószerű operációk a Hilbert térben

Jelölje $P_D$ a $\mathbb{H}$ Hilbert tér nemüres, zárt konvex $D$ halmazára való *metrikus vetítést*, azaz a

$$P_D x \in D, \quad \|x - P_D x\| = \inf\{\|x - y\| : y \in D\}.$$

összefüggéssel értelmezett leképezést.

Hogyha $K$ és $L$ a $\mathbb{H}$ Hilbert tér kölcsönösen duális kúpjai, értelmezzük a következő *hálószerű operációkat* :

$$x \sqcap_K y = P_{x-K} y, \; x \sqcup_K y = P_{x+K} y, \; x \sqcap_L y = P_{x-L} y, \text{ and } x \sqcup_L y = P_{x+L} y.$$

Az elnevezést az indokolja, hogy az értelmezett operációk tulajdonságai a vektoráló $\vee$ és $\wedge$ hálóoperációinak tulajdonságaira hasonlítanak.

Az $M$ halmazt *$K$-invariánsnak* nevezzük, ha a $\sqcap_K$, $\sqcap_L$, $\sqcup_K$ and $\sqcup_L$ operációkra invariáns, vagyis $x \,\square\, y \in M$, bármely $x, y \in M$ és bármely $\square \in \{\sqcap_K, \sqcap_K, \sqcup_K, \sqcup_L\}$ esetén.

Összefoglalónk fontos eredménye a következő állítás:

**3.1 Tétel (lásd [19], Theorem 1).** *Legyen $K \subseteq \mathbb{H}$ egy zárt kúp és $C \subseteq \mathbb{H}$ egy nemüres zárt konvex halmaz. A $C$ halmaz akkor és csak akkor $K$-invariáns, ha $P_C$ $K$-izoton.*

Ha a $P_C$ $K$-izoton (jelölések a fenti tételből), akkor a $C$-t *$K$-izoton vetítő halmaznak* nevezzük. A $K \subseteq \mathbb{H}$ kúpot *izoton vetítő kúpnak* nevezzük, ha a $P_K$ vetítés $K$-izoton, azaz a $K$ kúp egy $K$-izoton vetítő halmaz.

Az 3.1 Tételből adódik a

**3.1 Következmény.** *A $K \subseteq \mathbb{H}$ kúp akkor és csak akkor izoton vetítő, ha $K$-invariáns halmaz.*

A hálószerű operációk segítségével igazolható a következő dualitási tétel:

**3.2 Tétel (lásd [16], Theorem 1).** *Legyenek $K$ és $L$ kölcsönösen duális kúpok a $\mathbb{H}$ térben. A következő állítások ekvivalensek:*

1. *$P_K$ $K$-izoton.*
2. *$P_L$ $L$-szubadditív.*

# 4. Izotonitás az euklideszi térben

Jelölje $\mathbb{R}^m$ az $m$-dimenziós euklideszi teret, $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a benne értelmezett skaláris szorzatot és $\|\cdot\|$ az általa származtatott normát.

A

$$K = \{t_1 x^1 + \cdots + t_m x^m : t_i \in \mathbb{R}_+, \; i = 1, \ldots, m\}$$

halmaz, ahol $x^1, \ldots, x^m$ lineárisan független elemek, *szimpliciális kúp*.

Az

$$F_i = \{t_1x^1 + \cdots + t_{i-1}x^{i-1} + t_{i+1}x^{i+1} + \cdots + t_mx^m : \; t_j \in \mathbb{R}_+, \; j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m\}$$

kúpok a $K$ *maximális lapjai*, ahol $i = 1, \ldots, m$.

Az általunk tárgyalt témakör kiindulópontja és első jelentős eredménye a következő

**4.1 Tétel (lásd [8], Theorem).** *A $K \subset \mathbb{R}^m$ akkor és csak akkor izoton vetítő kúp, ha olyan szimpliciális kúp, hogy maximális lapjainak külső normálisai páronként nem hegyes szöget alkotnak.*

A [8], valamint a [12] tételeinek következménye a következő

**4.2 Tétel.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^m$ zárt származtató kúp, $K^*$ ennek duálisa. Akkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. *$K$ izoton vetítő kúp;*
2. *$K^*$ olyan szimpliciális kúp, amit páronként nem hegyes szöget bezáró vektorok generálnak;*
3. *$P_{K^*}$ $K^*$-szubadditív.*

A tétel bizonyítása nem terjeszthető ki Hilbert térre, mert a 1. $\Leftrightarrow$ 2. és a 2. $\Leftrightarrow$ 3. ekvivalenciák bizonyításából áll, ahol a 2. föltétel tipikusan véges dimenziós. Tehát a 3.2 és a 4.2 Tételek abban az értelemben függetlenek, hogy egyik sem következménye a másiknak.

A szimpliciális kúp kitüntetett szerepet játszik a rendezett euklideszi térben megfogalmazott izoton leképezések elméletében. Ha például az euklideszi normát egy bizonyos konvexitási feltételeknek engedelmeskedő $\varphi$ normával helyettesítjük és a vetítést ezzel értelmezzük, kimondható, hogy

**4.3 Tétel (lásd [5], Theorem 9).** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^m$ zárt származtató kúp. Ha a $\varphi$ szerinti vetítés $K$-ra $K$-izoton, akkor $K$ szimpliciális kúp.*

Igaz továbbá a következő állítás:

**4.4 Tétel (lásd [5], Theorem 10).** *Bármely $K \subseteq \mathbb{R}^m$ szimpliciális kúp esetén létezik egy skaláris szorzat úgy, hogy a skaláris szorzat által értelmezett vetítés szerint $K$ izoton vetítő kúp legyen.*

Legyen az $\mathbb{R}^m$ euklideszi tér az $e^1, \ldots, e^m$ ortonormális vektorrendszer származtatta vonatkoztatási rendszerrel fölruházva. Föltételezzük , hogy $\mathbb{R}^m$ minden pontja egy oszlopvektor. (A tér elemeit stiláris meggondolásból esetenként pontoknak, vagy vektoroknak nevezzük.)

Az

$$\mathbb{R}^m_+ = \{t_1e^1 + t_2e^2 + \cdots + t_me^m : \; t_i \in \mathbb{R}_+, \; i = 1, 2, \ldots, m\}$$

szimpliciális kúpot a vonatkoztatási rendszer *pozitív ortánsának* nervezzük. A pozitív ortáns származtatta rendezés az ú. n. *koordinátánkénti rendezés.*

Legyenek $p, q$ pozitív egész számok. Az $(x, u) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ jelölés a továbbiakban azt fogja jelenteni, hogy $x \in \mathbb{R}^p$ és $u \in \mathbb{R}^q$. Ha $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ és $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$ jelölik a skaláris szorzatot az $\mathbb{R}^p$ illetve $\mathbb{R}^q$ Euklideszi terekben, akkor a továbbiakban feltételezni fogjuk, hogy az $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ Euklideszi tér skaláris szorzata az $\langle (x, u), (y, v) \rangle = \langle x, y \rangle_p + \langle u, v \rangle_q$ által van értelmezve, ahol $(x, u)$, $(y, v)$ az $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ tetszőleges vektorai. Jelölje $e$ az $\mathbb{R}^p$ azon vektorát amelyiknek minden komponense 1. A [17] dolgozatban bevezettük az

$$\mathcal{L}(p, q) = \{(x, u) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : x \geq \|u\|e\}, \tag{1}$$

(ahol $\leq$ a koordinátánkénti rendezés) *kiterjesztett Lorentz kúpot* és az

$$\mathcal{L}_{\geq}(p,q) = \{(x,u) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : x_1 \geq \cdots \geq x_p \geq \|u\|\} \tag{2}$$

*monoton kiterjesztett Lorentz kúpot.* Úgy az $\mathcal{L}(1,q)$ mint az $\mathcal{L}_{\geq}(1,q)$ a *Lorentz kúp.* Az $\mathcal{L}(p,q)$ (illetve $\mathcal{L}_{\geq}(p,q)$) poliedrális kúp (azaz véges számú origót tartalmazó zárt féltér metszete) akkor és csakis akkor ha $q=1$.

Az $\mathcal{L}(p,q)$ kiterjesztett Lorentz kúp és az $\mathcal{L}_{\geq}(p,q)$ monoton kiterjesztett kúp izoton vetítő halmazai a vegyes komplementaritási feladatok és a hengereken értelmezett variációs egyenlőtlenségek megoldására használhatók [6, 17, 18]. Ezeket a halmazokat a következő két tétel adja meg:

**4.5 Tétel (lásd [17], Theorem 2).**

1. *Legyen $K = \mathbb{R}^p \times C$, ahol $C$ egy tetszőleges nemüres belsejű zárt konvex halmaz $\mathbb{R}^q$-ban és $\mathcal{L}(p,q)$ az (1) által értelmezett kiterjesztett Lorentz kúp. Ekkor, $K$ egy $\mathcal{L}(p,q)$-izoton vetítő halmaz.*

2. *Legyen $q > 1$ egész szám és $K \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ egy nemüres zárt konvex halmaz. A $K$ halmaz akkor és csakis akkor $\mathcal{L}(1,q)$-izoton vetítő ha létezik egy $C \subseteq \mathbb{R}^q$ nemüres zárt halmaz úgy, hogy $K = \mathbb{R}^p \times C$.*

3. *Legyenek $p,q > 1$ egész számok, és*

$$K = \cap_{\ell \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_-(\gamma^\ell, \beta^\ell) \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q,$$

*ahol $\gamma^\ell = (a^\ell, u^\ell) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ egy egységvektor és $\mathcal{H}_-(\gamma^\ell, \beta^\ell)$ a $\beta^\ell \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ ponton átmenő, $\gamma^\ell \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ külső normálisú féltér. A $K$ halmaz akkor és csakis akkor $\mathcal{L}(p,q)$-izoton vetítő ha bármely $\ell \in \mathbb{N}$ esetén fennáll egy a következő feltételek közül:*

   *(a)* $a^\ell = 0$,

   *(b)* $u^\ell = 0$, *és létezik $i \neq j$ úgy, hogy $a_i^\ell = \sqrt{2}/2$, $a_j^\ell = -\sqrt{2}/2$ és $a_k^\ell = 0$, bármely $k \notin \{i,j\}$ esetén.*

**4.6 Tétel (lásd [18], Theorem 3.4).** *Legyenek $p > 0$ és $q > 1$ egész számok és $\mathcal{L}_{\geq}(p,q)$ az (2) által értelmezett monoton kiterjesztett Lorentz kúp. A nemüres belsejű $K \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ halmaz akkor és csakis akkor $\mathcal{L}_{\geq}(p,q)$-izoton vetítő ha létezik egy $C \subseteq \mathbb{R}^q$ nemüres belsejű halmaz úgy, hogy $K = \mathbb{R}^p \times C$.*

# 5. Példák és alkalmazások

## 5.1. Nemlineáris komplementaritás a Hilbert térben

Legyen $\mathbb{H}$ Hilbert tér, $K \subseteq \mathbb{H}$ kúp, $K^*$ a $K$ duálisa, $f: K \to \mathbb{H}$ adott leképezés. Az

$$NKF(K,f): \text{ Keresett az } x^* \in K \text{ elem amelyre } f(x^*) \in K^* \text{ valamint } \langle x^*, f(x^*)\rangle = 0$$

feladatot *a $K$ kúphoz és $f$ leképezéshez rendelt nemlineáris komplementaritási feladatnak* nevezzük. Az $NKF(K,f)$ komplementaritási feladat megoldása az

$$K \ni x \mapsto P_K(x - f(x)), \tag{3}$$

leképezés fixpontja.

Az izotonitási kutatások kiindulási pontja olyan föltételek keresése $K$-ra és $f$-re amelyekre a

$$x^{n+1} = P_K(x^n - f(x^n)),$$

tipusú iteráció a feladat megoldásához vezessen. Ezt a iterációt ki lehet terjeszteni implicit komplementaritási feladatokra, vegyes komplementaritási feladatokra és variációs egyenlőtlenségera is.

Hasonló iterációk vezethetők be variációs egyenlőtlenségek, valamint implicit és vegyes komplementaritási feladatok esetén. A megfelelő vetítések izotonitási és az értelmező függvények monotonítási feltételei különböző megoldási algoritmusokhoz vezetnek. Ezeket többek között a [1–3, 6, 9, 10, 15, 17, 18] cikkek tárgyalják.

## 5.2. Az izoton regresszió feladata

1. A derékszögű vonatkoztatási rendszer $\mathbb{R}^m_+$-al jelölt pozitív ortánsa izoton vetítő kúp.
2. A
$$\kappa = \left\{x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^\top \in \mathbb{R}^m : 0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_m\right\}$$
kúp izoton vetítő kúp.

A statisztikában meghonosodott szóhasználattal a $\kappa$ kúpot a következőkben *izoton kúpnak* fogjuk nevezni.

Az adott $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^\top$ pont esetén az

$$\text{argmin}_x \left\{\sum_{i=1}^{m}(y_i - x_i)^2 : \ 0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_m\right\}$$

pont meghatározása az úgynevezett *izoton regresszió* feledata.

Észrevesszük, hogy a fenti összeg nem más mint az $y$ és az $x$ pontok távolságának négyzete, tehát a fönti feladat megoldása nem más mint

$$\text{argmin}_x \left\{\sum_{i=1}^{m}(y_i - x_i)^2 : \ 0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_m\right\} = P_\kappa y,$$

azaz az $y$ pontnak a $\kappa$ kúpra való metrikus vetítése.

A izoton regresszió feladatának jelentős irodalma van. Több módszer is született a feladat megoldására.

Guyader és Jégou francia statisztikusok felismerték, hogy a $\kappa$ kúp izoton vetítősége és egyéb tulajdonságai lehetővé teszik bizonyos módszerek ekvivalenciájának bizonyítását [7].

Az izoton regresszióval párhuzamosan nagy fontossága van a statisztikában az általános izoton regressziónak, amely a következőképpen fogalmazható meg:

Az adott $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^\top$ pont esetén keresett az

$$\text{argmin}_x \left\{\sum_{i=1}^{m}(y_i - x_i)^2\right\}$$

pont, midőn $x_k \ge 0$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$ és $x_i \le x_j$ és $(i, j) \in (N, G)$, ahol utóbbi az indexek alkotta teljes rendezett gráf.

Ha

$$K = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^\top \in \mathbb{R}^m : x_k \ge 0, \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}, \, x_i \le x_j, \ \forall (i, j) \in (N, G)\},$$

akkor itt is az

$$\operatorname{argmin}_x \left\{ \sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i)^2 : \ (i,j) \in (NG) \right\} = P_K y$$

pont meghatározása a feladat.

A fönt értelmezett $K$ kúpot *általánosított izoton regressziós kúpnak* nevezzük.

A probléma az, hogy $K$ akkor és csak akkor izoton vetítő kúp, ha izomorf a $\kappa$ kúppal, azaz izoton kúp. Tehát a kiterjesztett feladatra nem alkalmazhatók azok a megoldási módszerek, amelyek a standard izoton regressziós feladatra működnek.

Jelölje $\leq$ a koordinátánkénti rendezést az $\mathbb{R}^m$ térben azaz $x = (x^1, ..., x^m) \leq y = (y^1, ..., y^m)$ legyen akkor és csak akkor igaz, ha $x^i \leq y^i$, $\forall\, i \in \{1, \dots, m\}$.

Keressük a $L \subseteq \mathbb{R}^m_+$ kúpot amelyre

$$x \leq y \Rightarrow P_L x \leq P_L y.$$

**5.1 Tétel (lásd [14], Theorem 5).** *Izomorfizmustól eltekintve összesen $m(m-1)$ olyan $L \subseteq \mathbb{R}^m_+$ kúp létezik, amey a fönti tulajdonsággal rendelkezik. Minden $K$ általánosított izoton regressziós kúp ehhez az osztályhoz tartozik.*

## 5.3. A képrekonstrukció feladata

Legyenek $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathbb{R}^m$ adott pontok , $d_{ij} = \|A_i - A_j\|^2$, $D = (d_{ij})$ az ú. n. *euklideszi távolság-mátrix, EDM*, ($D \in EDM$). ($D$ szimmetrikus, azaz $d_{ij} = d_{ji}$, $d_{ij} \geq 0$ és „lyukas”, azaz $d_{ii} = 0$.)

Tételezzük föl, hogy az $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ ponthalmaz esetén a $d_{ij} = \|A_i - Aj\|^2$ távolságnégyzetek valódi értékét (esetleg néhány esettől eltekintve) nem tudjuk meghatározni, de ezek viszonyát igen, azaz megvannak az eszközeink arra, hogy egy nagyságrendi sorrendet határozzunk meg a $d_{ij}$ számok között:

$$d_{12} \leq ... \leq d_{ij} \leq ... \leq d_{kl}.$$

(Példának okáért vehető ezen számok gyanánt a természetes számok nem csökkenő sorozata.) Az így szerkesztett számsorozat tekinthető az $\mathbb{R}^N$ Descartes koordináta rendszerrel fölruházott euklideszi tér egy pontja koordinátáinak, ahol $N = m(m-1)/2$. Osszuk ki a tér koordinátáit olyképpen, hogy a $d_{ij}$ pontnak (távolságnégyzetnek), azaz az $(i,j)$ indexpárnak az az $r$-edik $x_r$ koordináta feleljen meg, ahányadik helyen áll a sorozatban.

A gyakorlatban, ahol a térképkészítés feladata és sok más vele rokonítható feladat merül föl, eljárást dolgoztak ki arra, hogy a távolságviszonyokat felhasználva a valóságot jól megközelítő térképet rajzoljanak. Ennek lényege a következő [4]:

Legyen

$$\kappa = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_N)^\top \in \mathbb{R}^N : \ 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N\right\}.$$

$$(d_{12}, ..., d_{ij}, ..., d_{kl}) \in \kappa.$$

A $d_{ij}$ értékek folyamatos javításával, a nagyságrendi sorrend betartása mellett arra törekszünk, hogy a $D = (d_{ij}) \in EDM$ legyen. Ezt a $\kappa$ valamint a a pozitív szemidefinit mátrixok $S_+$ kúpjára való alternatív vetítés sorozatával érhető el.

Megjegyezzük, hogy az $S_+$ kúpra könnyű vetíteni, ugyanis a vetület meghatározása a szimmetrikus mátrix sajátértékei meghatározására vezethető vissza.

Kezdetben a $\kappa$ kúpra való minden vetítés egy végtelen iteratív eljárás eredménye volt. Tekintettel a $\kappa$ kúp oriási dimenziójára és az iterációk nagy számára, a térképrekonstrukció igen lassúnak bizonyult.

John Dattorro fölismerte, hogy a $\kappa$-ra való vetítésnek van egy hatékonyabb módszere, amelyet a [11] dolgozat ír le. Az izoton vetítő kúpra való vetítés véges algoritmusának felhasználásával a konvergencia két nagyságrenddel javítható.

Azóta kiderült, hogy a $\kappa$ kúpra még ennél hatékonyabban is lehet vetíteni, felhasználva a $P_\kappa = P_\mu(x)^+$ képletet (ahol $z \in \mathbb{R}^m$ esetén $z^+$ a $z$ vektor nem-negatív komponenseivel alkotott vektor) [13], ahol

$$\mu = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n\},$$

mivel az úgynevezett PAVA algoritmus (lásd a [13] irodalomjegyzékét) a $\mu$ kúpra nagyon hatékonyan vetít.

# Hivatkozások


[1] M. Abbas and S.Z. Németh. Finding solutions of implicit complementarity problems by isotonicity of the metric projection. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75(4):2349–2361, 2012.

[2] M. Abbas and S.Z. Németh. Implicit complementarity problems on isotone projection cones. *Optimization*, 61(6):765–778, 2012.

[3] M. Abbas and S.Z. Németh. Solving nonlinear complementarity problems by isotonicity of the metric projection. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 386(2):882–893, 2012.

[4] J. Dattorro. *Convex Optimization and Euclidean Distance Geometry*. COandEDG version 02.24.2010., 2010.

[5] O.P. Ferreira and S. Z. Németh. Generalized isotone projection cones. *Optimization*, 61(9):1087–1098, 2012.

[6] Y. Gao, S. Z. Németh, and R. Sznajder. The monotone extended second-order cone and mixed complementarity problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, pages 1–27, 2021.

[7] A. Guyader, N. Jégou, A. B. Németh, and S. Z. Németh. A geometrical approach to iterative isotone regression. *Applied Mathematics and Computation*, 227:359–369, 2014.

[8] G. Isac and A. B. Németh. Monotonicity of metric projections onto positive cones of ordered Euclidean spaces. *Arch. Math.*, 46(6):568–576, 1986.

[9] G. Isac and A. B. Németh. Isotone projection cones in Hilbert spaces and the complementarity problem. *Boll. Un. Mat. Ital. B (7)*, 4(4):773–802, 1990.

[10] G. Isac and A. B. Németh. Projection methods, isotone projection cones, and the complementarity problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 153(1):258–275, 1990.

[11] A. B. Németh and S. Z. Németh. How to project onto an isotone projection cone. *Linear Algebra Appl.*, 433(1):41–51, 2010.

[12] A. B. Németh and S. Z. Németh. A duality between the metric projection onto a cone and the metric projection onto its dual. *J. Math. Anal. Appl.*, 392(2):172–178, 2012.

[13] A. B. Németh and S. Z. Németh. How to project onto the monotone nonnegative cone using pool adjacent violators type algorithms. *arXiv preprint arXiv:1201.2343*, 2012.

[14] A. B. Németh and S. Z. Németh. Order isotonicity of the metric projection onto a closed convex cone. *arXiv preprint arXiv:1602.04743*, 2016.

[15] S. Z. Németh. Iterative methods for nonlinear complementarity problems on isotone projection cones. *J. Math. Anal. Appl.*, 350(1):340–347, 2009.

[16] S. Z. Németh. A duality between the metric projection onto a convex cone and the metric projection onto its dual in hilbert spaces. *Nonlinear Analysis*, 97:1–3, 2014.

[17] S. Z. Németh and G. Zhang. Extended Lorentz cones and mixed complementarity problems. *J. Global Optim.*, 62(3):443–457, 2015.

[18] Sándor Zoltán Németh and Guohan Zhang. Extended Lorentz cones and variational inequalities on cylinders. *J. Optim. Theory Appl.*, 168(3):756–768, 2016.

[19] A.B. Németh and S.Z. Németh. Lattice-like operations and isotone projection sets. *Linear Algebra and its Applications*, 439(10):2815–2828, 2013.

Németh Sándor a kolozsvári Babes-Bolyai Tudományegyetem nyugalmazott professzora. Tanulmányait a Bolyai, majd a Babes-Bolyai egyetemen végezte 1956 és 1961 között. 1961 és 1991 között a Román Tudományos Akadémia kolozsvári fiokjának tudományos munkatársa, 1991-től a Babes-Bolyai Tudományegyetem tanára 2006-os nyugdíjazásáig. Fontosabb kutatási területei: approximációelmélet, differenciálegyenletek, konvex geometria, vektoriális optimalizáció, rendezett vektorterek. A MTA külső tagja.

Németh Sándor Zoltán a University of Birmingham angliai egyetem matematika iskolájának docense. A Kolozsvári Babeş-Bolyai Egyetemen folytatott matematikus tanulmányait (1988-1993) követően a Budapesti Eötvös Loránd tudományegyetemen szerzett matematikus PhD fokozatot 1999-ben. 1992-1993 között Skóciában a University of Edinburgh egyetemen tanul TEMPUS ösztöndíjjal. 1998-2001 között az MTA Bolyai János kutatási ösztöndíjával az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Labóratóriumába kerül, ahol 1999-2005 között már kutatói állásban dolgozik. 2000-ben a Bolyai János Matematikai Társaság Farkas Gyula Alkalmazott Matematika Díjában részesül. Kutatási területei az általánosított konvexitás és optimalizálás Riemann sokaságokon, valamint a konvex analízis és egyensúlyi rendszerek.

NÉMETH SÁNDOR
Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Matematika-Informatika Fakultás
Kolozsvár
NÉMETH SÁNDOR ZOLTÁN
University of Birmingham, School of Mathematics
Birmingham, B15 2TT, UK

# ISOTONE PROJECTIONS AND THEIR APPLICATIONS

Alexander B. Németh Sándor Zoltán Németh

A self-mapping of a vector space is called isotone if it retains its order. For example, the positive part mapping of a vector lattice, or the projections onto specific cones of a Hilbert space are isotone. Besides of the practical applications of these mappings and their generalisations, the related theoretical investigations, which can be the source of further practical applications, are also important. The present article is dedicated to summarise these two important aspects in the case when the mapping is the metric projection.

*Keywords*: metric projections, cones, simplicial cones, isotone mappings

*Mathematics Subject Classification* (2000): 90C33, 15A48